

Einführungspraktikum  
**F3 Fadenpendel**

Julien Kluge

4. Februar 2015

**Student:** Julien Kluge [REDACTED]

**Partner:** [REDACTED]

**Betreuer:** Dr. Ulrike Herzog

**Raum:** 214

**Messplatz:** 1

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Messwerte, Auswertung und Fehlerrechnung</b>	<b>2</b>
3.1	10 Messungen, 10 Schwingungen, feste Fadenlänge . . . . .	2
3.2	10 Messungen, eine Schwingung, feste Fadenlänge . . . . .	3
3.3	20 Messungen, 10 Schwingungen, 10 Fadenlängen . . . . .	3
3.4	Lineare Regression zur Bestimmung von $g$ , $l_0$ und $T$ . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Fehleranalyse</b>	<b>4</b>
4.1	Systematische Fehleranalyse . . . . .	4
4.2	Andere Fehlerquellen . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Anlagen</b>	<b>6</b>
5.1	Formeln . . . . .	6
5.2	Abbildungen . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Quellen</b>	<b>7</b>

## 1 Abstract

Ein Fadenpendel, ist ein Schwingungsfähiges System, bestehend aus einem masselosen Faden und einer daran befestigten punktförmigen Masse. Dabei wird die Reibung an Aufhängung und Luftreibung vernachlässigt. Eine mathematische idealisierte Beschreibung seiner Bewegungsgleichung ist damit eine Schwingungsdifferentialgleichung. Ein angestoßenes Pendel findet seine Rücktreibende Kraft in der der Gewichtskraft  $F_g = m \cdot g$  die sich in einer Kraftzerlegung tangential und orthogonal zur Bahnkurve äußert. Die tangentielle Kraftkomponente trägt aktiv zur Schwingung bei und findet sich zerlegt somit in der Differentialgleichung. Allerdings ist diese nicht trivial zu lösen und berücksichtigt nicht viele andere Störeffekte eines realen, physikalischen Pendels, auf die wir im laufe dieses Protokolls noch eingehen werden. Mit der Annahme kleiner Winkel ( $\phi \leq 5^\circ$ ), vereinfacht sich die Beschreibung auf eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese ist leicht lösbar und ihre Ergebnisse überprüfbar.

## 2 Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau bestand aus einem längenverstellbaren Stahlfaden. An diesem war eine Masse angehängt (dessen Werte nicht zu den angegebenen im Script zu passen scheinen). Die Zeitmessung wurde mit einer digitalen Stoppuhr durchgeführt welche auf 10 ms genau anzeigen konnte. Alle Messungen fanden bei konstanter Raumtemperatur statt um etwaige temperaturbedingte Ausdehnung des Stahlfadens zu unterbinden.

Als erstes wurden zwei mal zehn Schwingungen gemessen. Dabei wurde stets darauf geachtet, dass System mit zwei oder mehr nicht gemessenen Schwingungen, Zeit zu geben sich einzuschwingen. Die erste Messreihe begann und endete im Umkehrpunkt des Pendels. Dieser Punkt befindet sich dort, wo das Pendel seine Momentangeschwindigkeit auf null senkt um die Richtung umzukehren. Die zweite Messreihe mit zehn Schwingungen erfolgte im Nullpunkt. Dieser ist dort, wo das Pendel im Ruhezustand verbleibt. Die dritte Messreihe umfasst zehn Messungen von einer Schwingung um den Nulldurchgang. Als letzte Messreihe, wurden 20 Messungen mit jeweils zehn Schwingungen und unterschiedlicher Fadenlänge gemacht. Dabei wurden bei einer Länge jeweils zwei der 20 Messungen durchgeführt. Sie wurde mit jeder Messung um 4 cm an einer vorhandenen Skale verkürzt.

## 3 Messwerte, Auswertung und Fehlerrechnung

### 3.1 10 Messungen, 10 Schwingungen, feste Fadenlänge

Messreihe 1 wurde am Umkehrpunkt gemessen und Messreihe 2 am Nulldurchgang. Folgende Werte wurden gemessen:

Tabelle 1: Werte in Sekunden

Messreihe 1	20.63	20.66	20.68	20.72	20.72	20.66	20.72	20.78	20.68	20.59
Messreihe 2	20.68	20.82	20.66	20.66	20.68	20.68	20.68	20.72	20.75	20.75

Der Fehler wurde mit dem Vertrauensbereich nach (13) abgeschätzt und geometrisch gemittelt mit dem Fehler der digitalen Uhr:

$$u = \sqrt{s^2 + (0.01 + 5 \cdot 10^{-4} * t)^2} \quad (1)$$

Somit ergeben sich folgende Ergebnisse:

Reihe	1	2
Mittelwert	20.68 s	20.71 s
Fehler	$(\pm 2.7 \cdot 10^{-2})$ s	$(\pm 2.6 \cdot 10^{-2})$ s
Standartabweichung	0.054	0.052
Vertrauensbereich	0.017	0.016
Periodendauer	$(2.07 \pm 2.7 \cdot 10^{-3})$ s	$(2.07 \pm 2.6 \cdot 10^{-3})$ s

Aus den Ergebnissen lässt sich schließen, dass die Messung durch den Nullpunkt günstiger ist, da der Fehler kleiner ist als beim Umkehrpunkt. Allerdings sollten diese Ergebnisse nochmal überprüft und genauer untersucht werden um es zu bestätigen oder zu widerlegen, da die Messung am Umkehrpunkt genauer sein sollte, aufgrund dessen das die Geschwindigkeit dort am geringsten ist und die richtige Stelle so am besten zu messen sein müsste.

### 3.2 10 Messungen, eine Schwingung, feste Fadenlänge

Folgende Werte wurden gemessen:

Tabelle 2: Werte in Sekunden

Messreihe 1	2.13	2.18	2.03	2.18	2.06	2.03	2.03	2.03	2.09	2.06
-------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Der Fehler wurde analog nach 3.1 bestimmt.

Somit ergeben sich folgende Ergebnisse:

Mittelwert	2.08 s
Fehler	$(\pm 2.2 \cdot 10^{-2})$
Standartabweichung	0.061
Vertrauensbereich	0.019
Periodendauer	$(2.08 \pm 2.2 \cdot 10^{-2})$ s

Man kann hiermit gut sehen, das es weitaus intelligenter ist, das Pendel mehrmals Schwingen zu lassen. Zwar ist der Fehler der Stoppuhr durch kürzere Messung kleiner und damit der Gesamtfehler vom Zahlenwert her kleiner als der aus 3.1, allerdings ist er um eine Zehnerpotenz größer. Somit ist es zu bevorzugen, das Pendel so oft wie möglich schwingen zu lassen.

### 3.3 20 Messungen, 10 Schwingungen, 10 Fadenlängen

Der Wert für Messreihe 1 wurde aus 3.1 entnommen.

Folgende Werte wurden gemessen.

Tabelle 3: Messwerte in Sekunden

Länge $l_i + l_0$	Messung 1	Messung 2	Mittelwert	Fehler	Wert
$0 + l_0$ cm	–	–	20.71	$\pm 2.6 \cdot 10^{-2}$	$2.07 \pm 2.6 \cdot 10^{-3}$
$-4 + l_0$ cm	20.25	20.41	20.33	$\pm 8.3 \cdot 10^{-2}$	$2.03 \pm 8.3 \cdot 10^{-3}$
$-8 + l_0$ cm	19.85	19.97	19.91	$\pm 6.3 \cdot 10^{-2}$	$1.99 \pm 6.3 \cdot 10^{-3}$
$-12 + l_0$ cm	19.53	19.47	19.50	$\pm 3.6 \cdot 10^{-2}$	$1.95 \pm 3.6 \cdot 10^{-3}$
$-16 + l_0$ cm	19.06	19.22	19.14	$\pm 8.2 \cdot 10^{-2}$	$1.91 \pm 8.2 \cdot 10^{-3}$
$-20 + l_0$ cm	18.78	18.66	18.72	$\pm 6.3 \cdot 10^{-2}$	$1.87 \pm 6.3 \cdot 10^{-3}$
$-24 + l_0$ cm	18.25	18.35	18.30	$\pm 5.4 \cdot 10^{-2}$	$1.83 \pm 5.4 \cdot 10^{-3}$
$-28 + l_0$ cm	17.72	17.82	17.77	$\pm 5.3 \cdot 10^{-2}$	$1.78 \pm 5.3 \cdot 10^{-3}$
$-32 + l_0$ cm	17.37	17.32	17.35	$\pm 3.1 \cdot 10^{-2}$	$1.74 \pm 3.1 \cdot 10^{-3}$
$-36 + l_0$ cm	16.72	16.85	16.79	$\pm 6.8 \cdot 10^{-2}$	$1.68 \pm 6.8 \cdot 10^{-3}$
$-40 + l_0$ cm	16.32	16.59	16.46	$\pm 1.4 \cdot 10^{-1}$	$1.65 \pm 1.4 \cdot 10^{-2}$

Die Fehler wurden per Größtfehlerabschätzung nach (11) geometrisch gemittelt mit dem Fehler der Uhr bestimmt:

$$u = \sqrt{(\max(\bar{x}, x_i))^2 + (0.01 + 5 \cdot 10^{-4} * t)^2} \quad (2)$$

### 3.4 Lineare Regression zur Bestimmung von $g$ , $l_0$ und $T$

Wenn man die Werte für die Periodendauer von 3.3 quadriert und in einem Verhältnis von  $T_i^2(l_i)$  darstellt, erhält man das in Abbildung 5.2 dargestellte Diagramm. Mit der Relation

$$T_i = 2\pi \sqrt{\frac{l_0 + l_i}{g}} \quad (3)$$

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot (l_0 + l_i) \quad (4)$$

- $l_0$  : Anfängliche Fadenlänge
- $l_i$  : Änderung der Fadenlänge mit dem Index  $i$
- $T_i$  : Periodendauer für die Fadenlänge  $l_0 + l_i$
- $g$  : Erdbeschleunigung angenähert mit  $9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

lässt sich eine Lineare Regression mit  $T^2 = a * l_i + b$  durchführen. Die Ergebnisse lassen sich aus der Abbildung ablesen. Mit den Werten für  $a$  und  $b$  lassen sich die Werte für  $l_0$  und  $g$  ermitteln.

$$g = \frac{4\pi^2}{a} \approx -9.77 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{g sollte positiv sein}$$

$$l_0 = \frac{b}{a} \approx -1.06\text{m}$$

~~Eine Berechnung der Fehler macht hierbei wenig Sinn, da die Werte mit einer extrem kleinen Unsicherheit bestimmt wurden die weit jenseits jeglicher Forderung von signifikanten Stellen ist.~~ Bei besseren Werten müsste die gaußsche Fehlerfortpflanzung in (14) benutzt werden.

Mit der folgenden Relation kann nun auch die Periodendauer  $T$  rechnerisch bestimmt werden.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}} \approx 2.07\text{s} \quad (5)$$

Dieser Wert stimmt mit den gemessenen Werten aus 3.1 nahezu überein. Somit kann man auch durch eine andere Messmethode die Ergebnisse von 3.1 bestätigen und vice versa. Leider ist hier kein Vergleich der Fehler möglich, da die Fehler der Regression, so klein sind.

## 4 Fehleranalyse

### 4.1 Systematische Fehleranalyse

Wie eingangs erwähnt, wird beispielsweise die Masse des Pendels als punktförmig angesehen. Genauso wurden weitere Kräfte und Abweichungen vernachlässigt. Auf drei davon wird im folgendem eingegangen.

#### 1. Kleine Winkel

Wie angemerkt, wird aufgrund der Differentialgleichung die Vereinfachung gemacht, dass  $\sin \phi = \phi$ . Die Fehler dieser Annahme bleiben für kleine Winkel ( $\phi \leq 5^\circ$ ) ebenfalls sehr klein aber wurden niemals in der Fehlerbetrachtung beachtet. Wenn man

die Bewegungsdifferentialgleichung ohne diese Vereinfachung als elliptische Differentialgleichung löst, entsteht ein Störterm der berechnet werden kann.

$$T_\phi = T \cdot \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\phi_0}{2}\right) + \mathcal{O}(\sin^6) \right) \quad (6)$$

Zur Berechnung dieses Terms zum zweiten Glied, muss eine Schätzung für den maximalen Auslenkwinkel gemacht werden. Aus der in 3.4 ermittelten Länge  $l_0$  und der geschätzten Auslenkung  $\Delta s \approx 0.1$  m, lässt sich ein  $\phi_0$  über die Relation  $\cos \phi = \Delta s \cdot l^{-1}$  herleiten mit  $\phi_0 \approx 5.4^\circ$ . Der Störterm kann somit berechnet werden.

$$\frac{T_\phi}{T} \approx 1.00056 \quad (7)$$

Es folgt, dass die Vereinfachung das Ergebnis um circa 0.056 % verfälscht. Ein vernachlässigbarer Fehler.

## 2. Auftriebskräfte

Eine ebenfalls nicht beachtete Ausnahme, bildet der Auftrieb der Luft. Trotz dem Fakt, dass der Bleizylinder eine viel größere Dichte aufweist als Luft, verdrängt er ein gewisses Volumen an Luft und somit eine gewisse Masse die als Auftrieb wirkt. Nach dem Archimedischen Prinzip beträgt die Auftriebskraft  $F_A = \rho_L \cdot V_K \cdot g$  und die ihr entgegengesetzte Gewichtskraft  $F_G = \rho_K \cdot V_K \cdot g$ .

- $\rho_L$  : Dichte der Luft mit circa  $1.2 \text{ kg/m}^3$
- $\rho_K$  : Dichte des Körpers
- $V_K$  : Volumen des Körpers
- $g$  : Erdbeschleunigung

Damit erhält man schließlich den berechenbaren Störterm.

$$T_A = T \cdot \sqrt{\frac{\rho_K}{\rho_K - \rho_L}} \quad (8)$$

Diesem Fehler ist nicht zu trauen, da die angegebenen Werte für den Körper nicht zu stimmen scheinen und er außerdem erhebliche Verformungen aufwies. Es folgt trotzdem der berechnete Wert.

$$\frac{T_A}{T} \approx 1.00005 \quad (9)$$

Es folgt, dass die Vernachlässigung des Auftriebs eine Messabweichung von 0.005 % erzeugt und somit vernachlässigbar ist.

## 3. Ausdehnung des Massekörpers

Anfangs wurde erwähnt, dass im idealen Pendel, die Masse als punktförmig angesehen wird. Dies ist im realen Pendel nicht der Fall. Es folgt, dass physikalisch das Drehmoment um den Aufhängepunkt zum Schwerpunkt der Masse betrachtet werden muss. Es ergibt sich der Störterm und Berechnung dazu.

$$\frac{T_S}{T} = \sqrt{1 + \frac{3R^2 + h^2}{12 \cdot l^2}} \approx 1.00009 \quad (10)$$

Auch diesem Fehler ist aufgrund der falschen Angaben zur Abmessung des Zylinders nicht zu trauen. Trotzdem beträgt die Abweichung nur 0.009 %. Somit ist letztendlich auch dieser Fehler vernachlässigbar.

Alle Fehler zusammen ergeben eine vernachlässigbare Abweichung von 0.07 %.

## 4.2 Andere Fehlerquellen

Als weitere Fehlerquellen ist wohl die vom Experimentator abhängige Reaktionszeit zu nennen. Diese sollte zwar für als zufällige Messabweichung im Vertrauensbereich aufgefasst werden, allerdings wären weitaus mehr Messwerte für eine Vertrauensbasierte Aussage dahingehend nötig. Ein weiterer Schritt wäre die Eliminierung dieses Fehlers durch Lichtschranken die einen deutlich geringeren Fehler aufweisen würden als die geschätzten 0.3 s Reaktionszeit. Es hat sich auch deutlich gezeigt, dass dieser Fehler bei unterschiedlichen Experimentatoren unterschiedlich groß ausfällt, da unterschiedlich große Streuungen zu sehen waren je nachdem wer gemessen hatte. Diese Aussage stützt der Fakt, das in den ersten beiden Messreihen die Genauigkeit bei der Reihe höher war, aus der, nach der Theorie, die niedrigere Genauigkeit zu erwarten war. Es wurden außerdem Messfehler dokumentiert.

In Reihe 1 wurde der erste Messwert von der anderen Schwingseite aus genommen, die mehr Schwingungsbreite zulässt und somit den Fehler nach (6) vergrößert. Im folgenden wurden daraufhin die Messungen von der linken Schwingseite durchgeführt. Außerdem wurde der zehnte Wert in Messreihe eins zu früh genommen und weißt damit auch die größte Abweichung der Messreihe auf. Das gleiche lässt sich zu Messwert Nummer zwei in Messreihe zwei sagen, nur das er zu spät genommen wurde. Diese Fehler basierten auf einer anfänglichen Unkonzentriertheit und haben dank der Mittelwertbildung keinen starken Einfluss auf das Ergebnis. Ein sehr großer nicht beachteter Fehler, ist die Reibung sowohl im Aufhängepunkt als auch mit der Luft allerdings lässt sich dieser Fehler schwer beschreiben und hat dank der relativ großen Masse des Gewichts und der damit verbundenen großen Trägheit wohl ebenfalls ein eher kleinen Einfluss auf den Fehler. Die Temperaturschwankungen im Raum und die damit verbunden Änderung der Länge des Fadens sind ebenfalls zu vernachlässigen, da die Temperatur über die Versuchszeit und insbesondere über die Aufnahme einer Messreihe nahezu konstant blieb. Auch die Reibung dürfte nicht zu einer großen Erwärmung geführt haben. Schlussendlich geben die Messwerte und Rechnungen alle ein einheitliches Bild eines nahezu idealen Fadenpendels her und der Versuch kann als erfolgreich gesehen werden.

## 5 Anlagen

### 5.1 Formeln

- **Größtfehlerabschätzung:**

$$\max(\bar{x}, x_i) \tag{11}$$

1.  $x_i$  : Messwerte durchnummeriert mit einer Laufvariable  $i$
2.  $\bar{x}$  : Mittelwert für alle  $x_i$

- **Standartabweichung**

$$s = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \tag{12}$$

1.  $x_i$  : Messwerte durchnummeriert mit einer Laufvariable  $i$
2.  $\bar{x}$  : Mittelwert für alle  $x_i$
3.  $n$  : Anzahl der Messwerte

- **Vertrauensbereich**

$$\bar{s} = \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (13)$$

1.  $s$  : Standardabweichung nach (12)
2.  $n$  : Anzahl der Messwerte

- **Gaußsche Fehlerfunktion**

$$u_f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot u_k \right)^2} \quad (14)$$

1.  $f$  : Funktion der Fehlergrößen
2.  $N$  : Anzahl der Messwerte
3.  $x_k$  : Fehlerbehaftete Größe mit dem Index  $k$
4.  $u_k$  : Fehler der behafteten Größe mit dem Index  $k$

## 5.2 Abbildungen

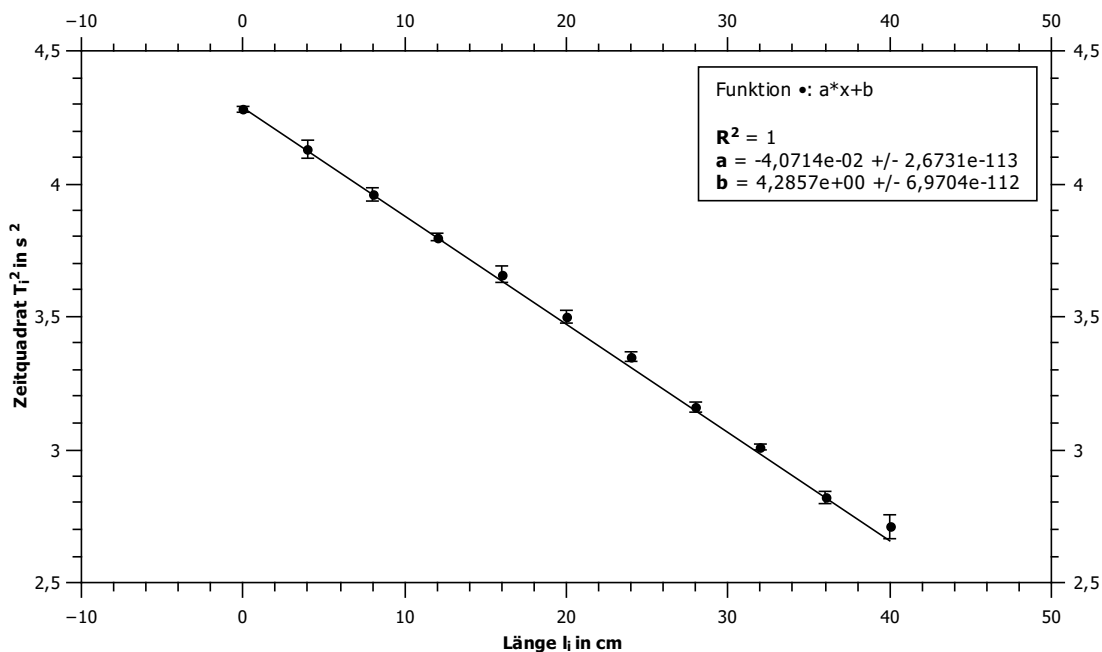


Abbildung 1: Grafische Darstellung des Zusammenhangs  $T_i^2(l_i)$

## 6 Quellen

- Blaues Praktikumsscript (*Formeln und Versuchshinweise*)
- Script zum Einführungspraktikum (*Formeln*)